TD 6 : Applications, relations

Injectivité, surjectivité, bijectivité

Exercice 1. Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

$$f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad n \mapsto n+1 \qquad f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^3 \qquad f_5 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto e^z \qquad f_7 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \mapsto (x+y, x-y)$$

$$f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad n \mapsto n+1 \qquad f_4 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto z^2 \qquad f_6 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad x \mapsto (x, -x) \qquad f_8 : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q}, \quad (a,b) \mapsto \frac{a}{b}$$

Exercice 2. Soit f et g deux applications de $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ définies par :

$$f(n) = 2n \qquad \text{et} \qquad g(n) = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

1) Montrer que f et g ne sont pas bijectives.
2) Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$. Sont-elles bijectives ?

Exercice 3. Soit $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$F(x,y,z) = (-x+y+z,\ z,\ y)$$

Calculer $F \circ F$. Que peut-on en déduire sur F ?

Exercice 4. Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. On suppose que $g \circ f$ est bijective. Montrer que f est injective et que g est surjective.

Exercice 5. Soit E un ensemble et $p : E \to E$ telle que $p \circ p = p$ (on dit que p est idempotente).

1) Montrer que si p est injective alors $p = \mathrm{id}_E$.
2) Montrer que si p est surjective alors $p = \mathrm{id}_E$.

Images directes, images réciproques

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = -x^2$. Déterminer les ensembles suivants :

$$f(\mathbb{R}) \qquad f(\{0,1\}) \qquad f([0,1]) \qquad f([-1,1])$$
$$f^{-1}(\mathbb{R}) \qquad f^{-1}(\mathbb{R}_-) \qquad f^{-1}(\{0\}) \qquad f^{-1}(\{6\})$$

Faire de même avec $f(x) = x^3 - x$. Il est conseillé de faire un tableau de variations.

Exercice 7. Soit $f : E \to F$ une application et $A, B \subset E$.
Montrer que si f est injective, alors $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Exercice 8. Soit E un ensemble, $f : E \to E$ une application et $A \subset E$. On dit que A est stable par f si $f(A) \subset A$.

1) On suppose $E = \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto x^2$. Déterminer les parties stables par f parmi $[0,1]$, $[1,2]$, $[-1,1]$, $\mathbb{R}_+$.
2) Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E stables par f. Montrer que $\bigcap_{i\in I} A_i$ et $\bigcup_{i\in I} A_i$ sont stables par f.

Exercice 9. Soit $f : E \to F$ une application. Montrer les assertions suivantes :

$$\forall B \in \mathscr{P}(F) \quad f(f^{-1}(B)) \subset B \qquad \text{et} \qquad \forall A \in \mathscr{P}(E) \quad A \subset f^{-1}(f(A))$$

Transformations du plan

Exercice 10. Décrire géométriquement la transformation géométrique correspondant aux applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définies par

$$f_1(z) = z + i\sqrt{3} \qquad f_2(z) = iz \qquad f_3(z) = (1-i)z + 3i \qquad f_4(z) = 2iz + 1$$

Exercice 11. Donner l'expression explicite des transformations suivantes :

1) Rotation de centre $\Omega(1+i)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.
2) Homothétie de centre $A(2i)$ et de rapport 3.
3) Similitude directe de centre $B(1-i)$ de rapport 2 et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

Relations

Exercice 12. Dans $\mathbb{C}$ on définit la relation $\mathcal{R}$ par :

$$z\mathcal{R}z' \iff |z| = |z'|$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Intepréter géométriquement la classe d'équivalence d'un $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 13. On définit sur $\mathbb{R}$ la relation $x\mathcal{R}y \iff x^2 - y^2 = x - y$.

1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2) Déterminer la classe d'équivalence d'un élément x de $\mathbb{R}$.

Exercice 14. On considère sur $\mathbb{N}^*$ la relation « divise » définie par

$$a \mid b \iff \exists k \in \mathbb{N}^* \quad b = ak$$

1) Montrer que c'est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$. Cet ordre est-il partiel ou total ?
2) On considère la relation divise sur $\mathbb{Z}^*$ définie par $a \mid b \iff \exists k \in \mathbb{Z}^* \quad b = ak$. Est-ce une relation d'ordre ?

Exercice 15. On considère sur $\mathbb{R}$ la relation suivante : $x \preceq y \iff e^{-x} \leq e^{-y}$

1) Démontrer que $\preceq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$. Cet ordre est-il partiel ou total ?
2) Déterminer les majorants d'un réel $x_0 \in \mathbb{R}$ donné.

Exercice 16. Soit E un ensemble. On admet (cf cours) que $\subset$ est une relation d'ordre partiel sur $\mathscr{P}(E)$.

1) Quel est le plus petit élément de $\mathscr{P}(E)$ pour $\subset$? Le plus grand élément ?
2) Soit $A, B \in \mathscr{P}(E)$. Donner un majorant de $\{A, B\}$ et un minorant de $\{A, B\}$.

Exercice bilan

On considère la fonction

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{C} \setminus \{1\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{\bar{z}+1}{z-1} \end{array}$$

1) Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, $f(z) \neq 1$.
2) Déterminer l'ensemble $f(i\mathbb{R})$.
3) f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
4) Montrer que $f^{-1}(\mathbb{R}) = (\mathbb{R} \cup i\mathbb{R}) \setminus \{1\}$.
5) Soit g la restriction de f à $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, c'est-à-dire

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} \setminus \{1\} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \dfrac{x+1}{x-1} \end{array}$$

   (a) Montrer que g est injective.
   (b) Montrer que $g(\mathbb{R} \setminus \{1\}) \subset \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
   (c) Simplifier, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, l'expression de $g(g(x))$.
   On commencera par justifier que cette expression a bien un sens.
   (d) Montrer que g établit une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, et expliciter sa réciproque.
   (e) Déterminer l'ensemble $g(\mathbb{R} \setminus \{1\})$.